Correction de DM n°1

Exercice 1.

$[a^2+(a-1)^2]^2=(2a^2-2a+1)^2=4a^4-8a^3+8a^2-4a+1=4a^2(a^2-2a+1)+(4a^2-4a+1)$
$=4a^2(a^2-2a+1)+(2a-1)^2$.Or $0\leq(2a-1)^2<4a^2$ donc $(2a-1)^2$ est bien le reste dans la division euclidienne de $[a^2+(a-1)^2]^2$ par $4a^2$.

Exercice 2

1. $D_{60}=\{-60;-30;-20;-15;-12;-10;-6;-5;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;5;6;10;12;15;20;30;60\}$
2. n^2-60 est un carré d'entiers $\Leftrightarrow$ il existe p dans Z tel que :

$n^2-60=p^2 \Leftrightarrow (n-p)(n+p)=60$

Soit d un diviseur naturel de 60 .

On est amené à résoudre dans Z^2 les systèmes : $\begin{cases} n+p=d \\ n-p=\dfrac{60}{d} \end{cases}$ .Comme $2n=d+\dfrac{60}{d}$, on ne considère que les systèmes où $d+\dfrac{60}{d}$ est pair . $n\in\{16;8\}$

Exercice 3 .

1. Les solutions du système sont : $b=\dfrac{a^2+a}{2};c=\dfrac{a^2-a}{2}$.

De plus, si a est pair, a^2 aussi , donc $b=\dfrac{a^2+a}{2}\in N$, idem pour c.

, si a est impair, a^2 aussi , donc $b=\dfrac{a^2+a}{2}\in N$,idem pour c.

2. Donc $b^2-c^2=(\dfrac{a^2+a}{2})^2-(\dfrac{a^2-a}{2})^2=a^3$.
3. Par application du 2. ,on trouve que : $5^3=15^2-10^2;6^3=21^2-15^2$.

Exercice 4

1. $999=37\times27 \Rightarrow 999\equiv0[37]\Rightarrow 1000=10^3\equiv1[37]$ donc $10^{3n}=(10^3)^n\equiv1[37],\forall n\in N$.
2. $10^{10}=10^9\times10\equiv10[37]$, $10^{20}=10^{18}\times10^2\equiv100\equiv26[37]$, $10^{30}\equiv1[37]$ donc

donc $10^{10}+10^{20}+10^{30}\equiv10+26+1=0[37]$, $0\leq0<37\Rightarrow$ 0 est le reste de la division euclidienne de $10^{10}+10^{20}+10^{30}$ par 37.