Résolution du paradoxe de l'interrogation surprise

Démonstration utilisant uniquement la logique mathématique.

Résumé : Résolution du paradoxe de l'interrogation surprise mettant en évidence l'erreur de logique dans les raisonnements habituels par récurrence. Une démonstration exacte est proposée montrant qu'il n'y a pas de paradoxe. Ce qui permet de mettre en évidence la cause principale d'erreur dans les raisonnements par récurrence liée à une généralisation abusive (fausse) d'une proposition exprimée en langage courant.

Introduction

De nombreux articles, concernant le problème du paradoxe de l'interrogation surprise, sont basés sur un raisonnement par récurrence. Ils concluent tous à un paradoxe ou par exemple à *« Il n'y a pas de paradoxe, seulement un drôle de professeur qui tient des propos incohérents – contradictoires – auquel on ne peut donc pas se fier. Il n'a aucune raison d'être fier de nous surprendre puisque quiconque se contredit surprend forcément ceux qui croient à la vérité de ses propos. »*
Citation extraite de la revue Accromath [Volume 9.2 – numéro été-automne 2014] accessible sur le site «accromath.uqam.ca ».

L'énoncé suivant est fortement inspiré de la revue Accromath citée ci-dessus.
Le professeur Martin annonce à ses élèves :
a) je ferai une interrogation la semaine prochaine;
b) vous ne pourrez pas savoir quel jour elle se déroulera : ce sera une surprise.
On peut ajouter, ce qui, en général, est sous-entendu dans « a ».
c) il n'y aura qu'une, et une seule, interrogation dans la semaine.

Mathilde, la meilleure élève de la classe, en mathématiques , raisonne alors ainsi :
Nous avons cours avec Monsieur Martin le lundi, le mardi, le mercredi, le jeudi, le vendredi et le samedi. Puisqu'il nous dit que nous ne pourrons pas connaître le jour de l'interrogation, celle-ci ne se déroulera pas le samedi, car samedi matin, sachant que l'interrogation se fera dans la semaine (affirmation a), elle ne pourrait avoir lieu que le samedi et donc nous saurions de manière certaine qu'elle va avoir lieu ce jour-là. Il est donc acquis que l'interrogation n'aura pas lieu le samedi. Mais alors, le vendredi, elle ne peut pas avoir lieu non plus, car sachant qu'elle ne peut pas avoir lieu le samedi, quand nous arriverons dans la classe le vendredi, nous saurons qu'elle va avoir lieu. Il est donc acquis aussi que l'interrogation n'aura pas lieu le vendredi. En poursuivant de la même manière ce raisonnement, Mathilde en déduit que l'interrogation ne peut avoir lieu ni le jeudi, ni le mercredi, ni le mardi, ni le lundi et donc qu'elle n'aura pas lieu.
Mais en classe, le mercredi à 14 h 30, le professeur distribue l'énoncé de l'interrogation et tous les élèves sont surpris !

OÙ EST LE PARADOXE ?

Première partie : Définition de l'effet de surprise

Pour construire un raisonnement logiquement sérieux, il nous faut définir avec précision tous les termes que nous employons. « une semaine, les jours de la semaine, une interrogation .. » tout cela semble clair et bien défini ; par contre « l'effet de surprise » est plus flou. La surprise, d'une façon générale, est fonction de deux paramètres : l'objet de la surprise et l'instant où l'évènement survient.
Je suis surpris du cadeau que je reçois pour mon anniversaire, mais connaissant bien évidemment la date de mon anniversaire, la surprise concerne, dans ce cas, l'objet que je reçois. Par contre, pour l'interrogation surprise : l'objet est connu (*il y aura obligatoirement une et une seule interrogation dans la semaine*), mais la date est inconnue, ce sera la surprise. Dans ce cas, l'« effet de surprise » est temporel, donc le problème doit être analysé en fonction du temps.
Je propose la définition suivante : « l'effet de surprise » se produit, lorsque, *a priori* (c'est-à-dire avant l'évènement), il est impossible aux élèves de prédire, avec certitude, la date de cet évènement.

Deuxième partie : analyse de l'interrogation surprise

Le lundi matin les élèves se posent la question : « l'interrogation aura-t-elle lieu aujourd'hui ? » et ils ne peuvent pas répondre avec certitude.
Deux possibilités se présentent :
1 - L'interrogation a lieu, ils sont surpris (et c'est terminé : l'interrogation a eu lieu, avec surprise, le lundi)
2 - L'interrogation n'a pas lieu (ils sont aussi surpris) et l'on passe au jour suivant.
Et ainsi de suite toute la semaine.
Lorsque l'on arrive le samedi matin, Mathilde fait le raisonnement suivant :
SI « le samedi, l'interrogation n'a pas déjà eu lieu » ALORS [« elle doit avoir lieu aujourd'hui» OU « on passe au jour suivant »]
Comme samedi est le dernier jour, « *on passe au jour suivant* » est impossible donc cette assertion est fausse.
Comme une, et une seule, interrogation doit avoir obligatoirement lieu dans la semaine, le samedi, les élèves peuvent savoir, avant l'action, avec certitude, que l'interrogation aura lieu : donc ce ne sera pas une surprise, par conséquent l'assertion « *l'interrogation doit avoir lieu aujourd'hui (samedi)* » est fausse.
La conclusion du « SI.. ALORS.. » étant fausse signifie que l'hypothèse est fausse (voir réf. n°2). Par conséquent l'assertion «*le samedi, l'interrogation n'a pas déjà eu lieu*» est fausse.
Le contraire de cette assertion s'énonce ainsi : « *le samedi, l'interrogation a déjà eu lieu* ».
Cette conclusion logique peut aussi s'exprimer sous la forme : « *l'interrogation a eu lieu l'un des cinq premiers jours de la semaine* » qui en compte six. Par conséquent, il n'y a aucun paradoxe.

Troisième partie : Analyses des raisonnements par récurrence

I - Récurrence remontant le temps

Le raisonnement intuitif habituel, en langage courant, est construit sur l'assertion « l'interrogation ne peut pas avoir lieu le dernier jour », car la date serait connue à l'avance ce qui est contraire à l'affirmation «b». Il est ensuite développé « par récurrence » en généralisant (abusivement) à tous les jours de la semaine cette propriété, ce qui est faux*, et qui conduit à un paradoxe.*

En suivant pas à pas la démarche habituelle, nous allons pouvoir mettre en évidence l'erreur du raisonnement.

A) Le sixième jour, le samedi, il ne peut pas y avoir d'interrogation, car comme il ne reste plus que ce jour-là, les élèves sauraient, à l'avance, la date de l'interrogation. Ce qui est contraire à l'affirmation « b ».
B) Le cinquième jour (vendredi) :
1. *soit l'interrogation a lieu ce jour*
2. ~~*soit on passe au jour suivant*~~

Le second choix est impossible, car le jour suivant est le samedi (dernier jour de la semaine). Et le dernier jour de la semaine, il ne peut pas y avoir d'interrogation.
Il ne reste que la possibilité n°1 qui devient impossible, car les élèves sauraient, à l'avance, la date de l'interrogation.
Donc, comme pour le samedi, l'interrogation ne peut pas avoir lieu de vendredi, et par récurrence, tous les autres jours de la semaine.
Erreur s'écrie Mathilde, l'interrogation a eu lieu le mercredi à 14 h 30 ! !
Si l'on écoute bien ce qu'a dit Mathilde, elle a peut-être raison ! Nous avons simplement oublié une troisième possibilité pour le vendredi. Cette possibilité s'écrit : « ***l'interrogation a déjà eu lieu*** ».
Nous aurions pu y penser plus tôt, car, pour le samedi, l'énoncé utile, pour un bon raisonnement, n'est pas «*il ne peut pas y avoir d'interrogation le samedi* », mais « *l'interrogation a déjà eu lieu* » ou « *l'interrogation a eu lieu l'un des cinq premiers jours de la semaine* » comme nous l'avons montré dans la Deuxième partie de cet article.
Donc le bon raisonnement pour le vendredi est :
B) Le cinquième jour (vendredi) :
1. soit l'interrogation a lieu ce jour (avec surprise)
2. ~~soit on passe au jour suivant~~
3. soit l'interrogation a déjà eu lieu

Le second choix est impossible, MAIS il reste DEUX possibilités, donc aucune certitude pour le vendredi.
C) Tous les jours précédents (du jeudi au mardi):
1. soit l'interrogation a déjà eu lieu

2. soit l'interrogation a lieu (le jour en question, avec surprise)
3. soit on passe au jour suivant

Il y a TROIS possibilités, donc aucune certitude sur ces dates.

D) Enfin, le premier jour (lundi) :

   1. ~~soit l'interrogation a déjà eu lieu~~
   2. soit l'interrogation a lieu (le lundi, avec surprise)
   3. soit on passe au jour suivant

   Pour le premier jour, « *soit l'interrogation a déjà eu lieu* » est impossible (il n'y a pas de jour précédent) donc cette assertion est fausse.

Il reste DEUX possibilités, donc aucune certitude sur cette date.

Par conséquent, un raisonnement correct conduit à la conclusion : « *l'interrogation surprise aura lieu l'un des cinq premiers jours de la semaine* » sans aucun paradoxe.

Résultat : le raisonnement habituel par récurrence en remontant le temps est FAUX. Ce n'est pas parce que le samedi (dernier jour de la semaine), il ne peut pas y avoir d'interrogation, qu'il est légitime d'extrapoler par récurrence pour les jours précédents ! ! En effet, les propriétés de chacune des journées de la semaine sont différentes les unes des autres, et en particulier de celles du samedi ! ! donc le raisonnement par récurrence habituel est FAUX.

II - Récurrence sur la durée de la « semaine »

Un autre raisonnement intuitif habituel, en langage courant, se présente comme suit (extrait de la revue Accromath [Volume 9.1 – numéro hiver-printemps 2014] déjà citée) : *« Pour comprendre le paradoxe, il faut simplifier l'histoire. Imaginons que les élèves de Monsieur Martin n'ont cours avec lui que le lundi et qu'il leur dise « (a) je ferai une interrogation la semaine prochaine et (b) vous ne pourrez pas savoir quel jour elle se déroulera; ce sera une surprise ». Un élève, Jacques, pourra alors raisonner ainsi : « Le lundi matin, je saurai que l'interrogation va avoir lieu aujourd'hui (car Monsieur Martin nous dit qu'il fera une interrogation cette semaine et que nous n'avons cours avec lui que le lundi) et qu'elle n'aura pas lieu aujourd'hui (car Monsieur Martin nous dit que nous serons surpris de l'interrogation or si elle a lieu le lundi nous ne serons pas surpris) ». Il y a contradiction entre les conclusions qu'on tire des affirmations de Monsieur Martin. <u>Notons que, dans le cas d'une semaine complète, il y a aussi une telle contradiction</u> : on déduit que l'interrogation aura lieu dans la semaine – Monsieur Martin l'affirme – et qu'elle n'aura pas lieu dans la semaine – raisonnement de Jacques. Donc ce que dit Monsieur Martin est contradictoire : il affirme une chose et son contraire à la fois. <u>Dans le cas de la semaine complète de cours, cette contradiction est masquée, mais il y a bien une contradiction dans les affirmations de Monsieur Martin.</u> ».* (<u>C'est, nous, qui avons souligné certaines parties du texte</u>)

Ce raisonnement est FAUX. Le raisonnement correct est le suivant.

I. La « semaine » d'une seule journée est impossible, car le premier jour est aussi le dernier, et nous avons vu que le dernier jour il ne peut pas y avoir d'interrogation
II. La « semaine » de 2 jours est aussi impossible, car le dernier jour étant impossible il ne reste que le premier jour . Donc, l'interrogation aura lieu obligatoirement le « lundi » ce qui n'est pas possible, car la date serait alors connue à l'avance.
III. Par contre, pour la « semaine » de 3 jours, il n'y a pas de problèmes (pas de paradoxe), car on peut refaire le raisonnement correct qui a été fait, ci-dessus, dans la Deuxième partie :
   a) le premier jour :
      1. soit l'interrogation a lieu (le premier jour avec surprise)
      2. soit on passe au deuxième jour

      Il y a DEUX possibilités, donc aucune certitude sur cette date.

   b) le deuxième jour :
      1. soit l'interrogation a déjà eu lieu (avec surprise)
      2. soit l'interrogation a lieu (le deuxième jour, avec surprise)
      3. soit on passe au jour suivant

      Il reste TROIS possibilités, donc aucune certitude sur cette date.

   c) Le troisième jour, qui est le dernier, comme démontré précédemment :
      1. soit l'interrogation a déjà eu lieu
      2. SI l'interrogation n'a pas déjà eu lieu ALORS

~~i. soit l'interrogation a lieu le dernier jour~~
~~ii. soit on passe au jour suivant~~

Pour le dernier jour, « *soit on passe au jour suivant* » est impossible donc cette assertion est fausse. Comme une, et une seule, interrogation doit avoir obligatoirement lieu dans la semaine, le dernier jour, les élèves peuvent savoir, avant l'action, avec certitude, que l'interrogation aura lieu : donc ce ne sera pas une surprise, par conséquent l'assertion « *soit l'interrogation doit avoir lieu le dernier jour* » est fausse. Les possibilités « i. » et « ii. » sont fausses donc la conclusion du « SI..ALORS.. » est fausse ; ce qui implique que l'hypothèse, aussi, « *l'interrogation n'a pas déjà eu lieu* » est fausse.
Il ne reste que : « *le dernier jour, l'interrogation a déjà eu lieu* ».
Pour une semaine de trois jours, il n'y a pas de paradoxe, l'interrogation aura lieu soit le premier, soit le deuxième jour.
Pour une « semaine » de quatre jours, ou plus, le même raisonnement, que ci-dessus (qui est d'ailleurs identique à celui développé dans la Deuxième partie), nous conduit à la conclusion : « *l'interrogation surprise aura lieu l'un des (n-1) premiers jours de la semaine* » sans aucun paradoxe [pour une « semaine » de n jours avec n strictement supérieur à 2].

Résultat : le raisonnement habituel par récurrence sur la durée de la semaine est FAUX. Ce n'est pas parce qu'une « semaine » d'une durée de un ou deux jours conduit à un paradoxe qu'il est légitime d'extrapoler à une durée quelconque ! ! En effet, les propriétés de chacune des journées pour une « semaine » de trois jours, ou plus sont différentes de celles d'un seul jour (ou de deux jours) ! !

Conclusion

- La conclusion du raisonnement logique correct est donc : « *l'interrogation a lieu l'un des cinq premiers jours de la semaine* » (qui en compte six) et l'on ne peut pas déterminer lequel. Par conséquent, il s'agit bien d'une interrogation surprise, il n'y a pas de paradoxe, et c'est ce que l'expérience confirme.
- Les raisonnements « habituels » par récurrence sont erronés, car ils présupposent que tous les jours ont les mêmes propriétés que le jour de départ (soit le samedi, si l'on remonte le temps, pour une semaine de six jours, soit le lundi pour une semaine, à durée variable, d'un ou deux jours) ce qui est FAUX comme cela a été montré dans cet article.
- Et, enfin, si l'on construit, correctement, ces raisonnements « dits par récurrence », ils aboutissent logiquement à la conclusion que « *l'interrogation surprise a lieu l'un des (n-1) premiers jours de la semaine* » sans aucun paradoxe [pour une « semaine » de n jours avec n strictement supérieur à 2].

Épilogue

- Dans cet article, nous avons proposé un raisonnement, suivant une logique mathématique précise tout en ne faisant usage que d'un langage compréhensible par le plus grand nombre possible de lecteurs, ce qui nous a conduits à démontrer que le problème dénommé « le paradoxe de l'interrogation surprise » n'est pas un paradoxe.
- Un raisonnement semblable peut être utilisé pour ce que l'on désigne couramment, à tort, sous le vocable de « *paradoxe* d'Achille et la tortue » (voir ci-dessous). La conclusion étant qu'il ne s'agit pas, non plus, d'un paradoxe.
- Cette étude nous a permis de plus de mettre en évidence que dans tout raisonnement logique, il faut être très attentif à ne pas, en utilisant le langage courant, se laisser tenter par des généralisations (ou récurrences) hâtives et abusives -donc fausses-.

- - - - - - - - -

Complément « pédagogique »

L'objectif de cet appendice est de dérouler l'argumentation qui vient d'être faite, en développant les raccourcis, donc en s'approchant le plus près possible du raisonnement formel de la logique tout en utilisant le langage « courant » afin d'être compréhensible par tout le monde.
En appelant **A** l'assertion « (*l'interrogation n'a pas déjà eu lieu*) » et en détaillant la démonstration, on s'aperçoit que **A** est en fait un « empilement » de telles propositions pour chacun des cinq premiers jours de la semaine.

En effet, le mardi matin, la question posée est :
SI (l'interrogation n'a pas eu lieu le lundi) ALORS … *on continue, et on passe au jour suivant.*
Le mercredi matin la question posée est :
SI [(l'interrogation n'a pas eu lieu le lundi) <u>ET</u> (l'interrogation n'a pas eu lieu le mardi)] ALORS …
et l'on continue jusqu'au samedi ;
donc, le samedi, ***A** = [(l'interrogation n'a pas eu lieu le lundi) ET (l'interrogation n'a pas eu lieu le mardi) ET .. (l'interrogation n'a pas eu lieu le vendredi)].*
Au début de cet article, nous avons vu que, quand la conclusion **B** de la proposition « SI **A** ALORS **B** » est fausse, cela implique que l'assertion **A** est aussi fausse. (voir la table de vérité, réf. N°2 ci-dessous)

Pour qu'une proposition «X_1 ET X_2 ET … ET X_5» soit fausse, [équivalente à «non-X_1 OU non-X_2 … OU non-X_5» vraie], il faut et il suffit que l'un (au moins) des «non-X_i» soit vrai, donc « *l'interrogation a eu lieu pendant l'un (au moins) des cinq premiers jours de la semaine* ». [Mais, comme dans notre cas, l'affirmation «c» indique qu'il n'y aura qu'une, et une seule, interrogation dans la semaine, il n'y a qu'un, et un seul, jour concerné].

Par conséquent, la conclusion formelle du raisonnement est :
Le samedi, on peut affirmer que « *l'interrogation a eu lieu l'un des cinq premiers jours de la semaine »,* sans pouvoir préciser lequel, il s'agit donc bien d'une interrogation surprise.
Cette conclusion est parfaitement conforme à l'expérience : *il n'y a aucun paradoxe*.

- - - - - - - - -

Un autre exemple : *Achille et la tortue*

Comme pour le problème traité dans cet article, mais sous un aspect un peu différent, le « paradoxe » d'Achille et la tortue n'en est pas un. Tout le monde *le sait!,* mais l'on continue à le présenter comme un vrai paradoxe !.
En effet, rappelons brièvement cette « l'histoire ».
Achille marche (ou court) deux fois plus vite que la tortue. Achille accepte un handicap de 100 m par rapport à la tortue, puis ils démarrent tous les deux en même temps. Lorsqu'Achille arrive aux 100 m, l'endroit où était la tortue au départ, celle-ci a déjà avancé de 50 m -donc *Achille ne l'a pas rattrapée*-. Puis, lorsqu'Achille parcourt les 50 m, la tortue est déjà 25 m plus loin -donc *Achille ne l'a pas rattrapée*- et ainsi de suite. <u>*Par conséquent, quel que soit le nombre d'étapes, Achille ne rattrapera jamais la tortue*.</u>

L'erreur de logique est dans cette dernière assertion ; il est FAUX de dire « *quel que soit le nombre d'étapes, Achille ne rattrapera jamais la tortue* ». Il s'agit d'une assertion « plus ou moins intuitive », mais logiquement non prouvée donc fausse.
En effet, aujourd'hui n'importe quel lycéen a appris que :

- si Achille avance DEUX fois plus vite que la tortue, lorsque la tortue parcourt 100 m, Achille parcourt 200 m donc il la rattrape au bout de ces 200 m (car la tortue a parcouru 100 m, plus les 100 m de handicap qu'Achille lui a consenti, cela fait exactement 200 m).
- l'élève a aussi appris que la série : $1 + 1/2 + 1/2^2 + .. + 1/2^n + …$ est une série CONVERGENTE et tend vers 2 !

Pourquoi enseigne-t-on toujours *LE PARADOXE* « d'Achille et la tortue » ? Alors que l'on sait *parfaitement aujourd'hui* qu'il ne s'agit pas d'un paradoxe, mais d'une *grave erreur de logique*.

-.-.-.-.-.-.-.-.-.-

Références :

1 - Pour ce qui concerne l'interprétation en langage courant de « l'implication », on peut lire, entre autres, avec intérêt, le paragraphe «*Un premier exemple de phénomène langagier»,* pages 3 et 4 de l'article de Zoé MESNIL.

« Zoé Mesnil - LOGIQUE ET LANGAGE DANS LA CLASSE DE MATHEMATIQUES ET LA FORMATION. *21ème Colloque de la CORFEM*, Jun 2014, Grenoble, France. (hal-01570177) »
On peut lire aussi « Hache C. (2019) - QUESTIONS LANGAGIÈRES DANS L'ENSEIGNEMENT ET L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES, Note de synthèse d'habilitation à diriger des recherches, Université Paris Diderot. (tel-02420979, version 1) ».

2 - Table de vérité de « SI A ALORS B »

A	**B**	**A=>B**
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	**F**	**V**